华　东　师　范　大　学

2002年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目：高等代数

招生专业：基础数学

一、(15分) 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 1 & x & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & x & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 2 & x & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

二、(15分) 设2n阶实对称矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

试求正交矩阵T，使$T'AT = T^{-1}AT = B$为对角矩阵，并求矩阵B.

三、(20分) 设$\mathcal{A}$为数域K上n维线性空间V的一个线性变换，满足$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$，$A$为$\mathcal{A}$在$V$的某基下的矩阵，$\operatorname{rank} A = r$.

1. 证明：(1) $\mathcal{A} + \mathcal{E}$为$V$的可逆线性变换；

   (2) $\operatorname{rank} A = \operatorname{Tr} A$.

2. 试求$|2E - A|$，这里E为单位矩阵，$\mathcal{E}$为恒等变换，rank与Tr分别表示秩与迹.

四、(20分) 设B是$n \times n$正定矩阵，C是秩为m的$n \times m$实矩阵，$n > m$. 令

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C' & 0 \end{pmatrix}$$

证明：A有n个正的特征值，m个负的特征值.

五、(15分) 设$f(x)$为实系数多项式. 证明：如果对任何实数c都有$f(c) > 0$，则存在实系数多项式$g(x)$和$h(x)$，使

$$f(x) = (g(x))^2 + (h(x))^2.$$

六、(15分) 设A，B都是n阶方阵，$\operatorname{rank} A = n - 1$. 证明：如果$AB = BA = 0$，则存在多项式$g(x)$，使$B = g(A)$.