第六章　几何空间的常见曲面

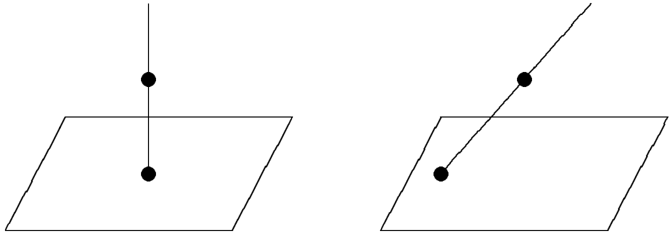
本章将研究几何空间中的常见曲面, 也可以说是比较容易写出方程的曲面. 它们是旋转面、柱面、锥面和二次曲面. 为了展示曲面, 必须把空间的图形绘制在平面上, 这就需要使用合适的投影方法. 因此在第 1 节我们讲解了画立体图的基本原理. 然后分别介绍了上述常见曲面的方程及性质. 我们尽可能多附一些图形, 而且这些图形都是按正投影精确绘制的. 在上机实习中还介绍了如何用 Maple 作出各种曲面的图形. 这样既使读者对各类曲面有一个直观的形象, 也为读者将来绘制立体图提供一些实例.

本章假定空间中已经取定一个直角标架 $[O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}]$.

§1　立体图与投影

在第三章 §8 里已经介绍了如何用斜二测投影画平面的立体图. 我们知道, 为了把 3 维的物体实现在平面上, 一般总是用投影的方法. 人用一只眼睛观察物体或者用照相机摄影都可以看成是从一个中心点出发向平面的投影. 当眼睛与物体的距离变成无穷大时, 中心投影就成了平行投影. 平行投影的计算公式显然比中心投影简单, 因此除非有特殊的要求, 一般总是采用平行投影代替中心投影. 如果平行投影的视线方向与象平面正交, 则称为**正投影**, 否则称为**斜投影**. 如图 6–1 所示.

第三章 §8 介绍的斜二测投影是一种斜投影. 球面经过斜投影后成了一个椭圆 (见图 6–2). 使人产生失真的感觉. 图 6–3 是用斜二测投影画的一个球. 其中与坐标平面 yOz 平行的截面仍被投影成圆. 而球面的轮廓则是一个椭圆. 这是斜投影的缺点. 但在画平面或直线图形时不会产生这个问题. 因此在画质量要求较高的曲面图形时一般不采用斜投影.



正投影　　　　斜投影

图 6–1

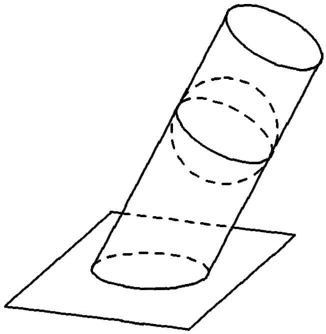


图 6–2

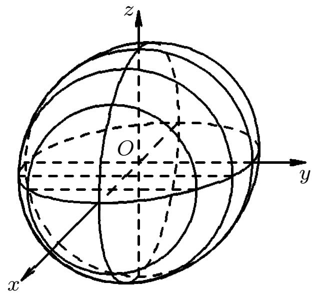


图 6–3

以下我们只讨论正投影.

设在空间已经有了一个直角标架. 只要确定视线的方向, 正投影就完全确定了. 确定视线方向的方式是很多的. 在数学软件 Maple 的 3 维图形显示中采用了视角 (θ, ϕ) 的刻画方式, 其意义如图 6–4 所示. 其中 OM 表示视线的方向,

最简单的正投影就是第四章例 4.2 所示的沿 x 轴方向的投影 $\mathscr{P}$. 这时对应的视角是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 现在我们要推导任意视角下的变换公式.

命题 1.1　*设空间正投影的视角为 (θ, ϕ) (如图 6–4 所示), 把投影平面上的直角坐标记为 (X, Y), 则 3 维欧几里得空间的坐标为 (x, y, z) 的点经正投影后得到的象点的坐标为:*

$$\begin{aligned} X &= -x\sin\theta + y\cos\theta \\ Y &= -x\cos\phi\cos\theta - y\cos\phi\sin\theta + z\sin\phi. \end{aligned} \tag{1.1}$$

证明: 我们先通过正交变换把 OM 方向变成 x 轴的方向. 另一方面为了保持立体感, 必须使原来的 z 轴方向经变换后仍然投影到 z 轴上去, 也就是说必须使原来的 z 轴始终保持在 xOz 坐标平面内. 我们通过以下两个旋转的复合得到所需的正交变换.

(1) 以 z 轴的正向为轴旋转 $-\theta$ 角 (旋转的正向是用右手法则确定的, 即当大拇指作为轴的正向时, 其余四个手指的转向就是旋转的正向). 把这个旋转变换记为 $\mathscr{R}_1$, 其矩阵为 (参见图 6–5):

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

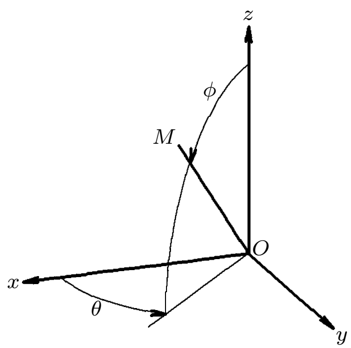


图 6–4

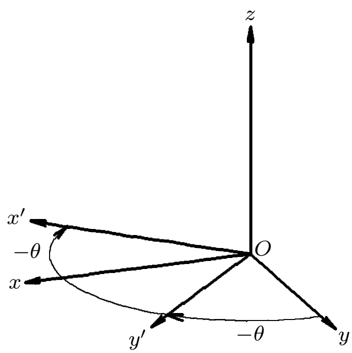


图 6–5

(2) 再以 y 轴的正向为轴旋转 $\frac{\pi}{2} - \phi$ 角 (参见图 6–6), 把这个旋转变换记为 $\mathscr{R}_2$, 其矩阵为:

$$R_2 = \begin{pmatrix} \sin\phi & 0 & \cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\phi & 0 & \sin\phi \end{pmatrix}.$$

请注意原来的 3 个坐标轴 Ox, Oy, Oz 分别被变换成了 Ox'', Oy'', Oz''. 图 6–6 中的 Ox 方向相对于 Ox'', Oy'', Oz'' 的位置与图 6–4 所示的视线的位置完全相同. 因此沿着 Ox 的方向向 yOz 平面作正投影就能得到视角为 (θ, ϕ) 的正投影.

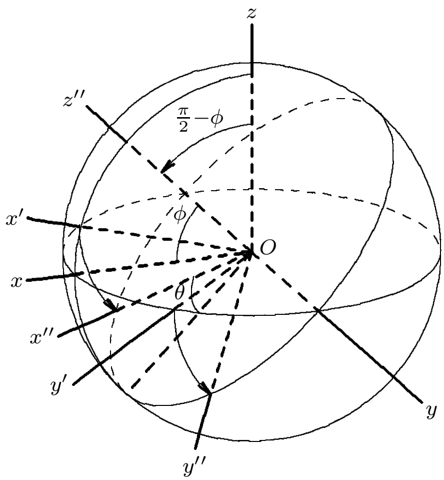


图 6–6

因此只要在作正交变换 $\mathscr{R}_2\mathscr{R}_1$ 后再作一个沿 x 轴方向的投影变换 (如第四章的例 4.2) 就能得到视角为 (θ, ϕ) 的正投影变换. 为了与习惯一致, 我们也可以把最后的投影变换改成到欧几里得空间平面的线性映射 $\mathscr{P}' : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, 使得 Y 轴的方向代表竖直向上的方向. 最终得到从 3 维欧几里得空间到 2 维欧几里得平面的线性映射 $\mathscr{P}'\mathscr{R}_2\mathscr{R}_1$. 其矩阵为:

$$\begin{aligned}
P'R_2R_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\phi & 0 & \cos\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\phi & 0 & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\phi\cos\theta & -\cos\phi\sin\theta & \sin\phi \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

空间中一个坐标为 (x, y, z) 的点经过正投影后成为平面中的坐标为

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\phi\cos\theta & -\cos\phi\sin\theta & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x\sin\theta + y\cos\theta \\ -x\cos\phi\cos\theta - y\cos\phi\sin\theta + z\sin\phi \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

的点. □

再介绍一些常用的视角. 在机械制图中常常使用的是前视图、上

视图与左视图. 前视图以 y 轴作为投影方向, 因此视角是 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 上视图以 z 轴作为投影方向, 因此视角是 $(0,0)$, 左视图以 x 轴作为投影方向, 因此视角是 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 画直观图时常常使用的正投影有正等测投影和正二等测投影两种.

正等测投影使用的视角是 $(45°, 54.7°)$, 即 $\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 这时 3 个单位向量的投影分别为

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \quad \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

从而这 3 个投影的长度相等, 都是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 所以被称为"等测". 实际作图时加以放大, 以轴向的实际尺寸作为投影的尺寸.

正二等测投影使用的视角是 $(20.7°, 70.5°)$, 即 $\tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{7}$, $\cos\phi = \frac{1}{3}$. 这时 3 个单位向量的投影分别为

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{14}}{12}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{14}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{12}\right), \quad \left(0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

从而第 2 与第 3 个投影的长度相等, 都是 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以被称为"二等测". 第一个投影的长度恰好等于另两个投影的一半. 实际作图时加以放大, 以 y, z 轴向的实际尺寸作为这两个轴向投影的尺寸, 以 x 轴向的实际尺寸的一半作为 x 轴向的投影的尺寸.

用正等测图形作图时, 首先是取定原点 O, 过 O 作竖直向上的 z 轴, 再作指向左下方的 x 轴以及指向右下方的 y 轴, x 轴和 y 轴都与 z 的负方向成 $60°$ 角. 如图 6–7 所示.

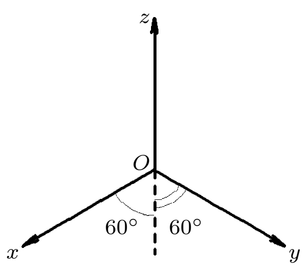


图 6–7

用类似方法可作正二等测投影图. 由于 x 轴与 y 轴的投影的斜率分别是:

$$\frac{-\frac{\sqrt{14}}{12}}{-\frac{\sqrt{2}}{4}}=\frac{7}{3\sqrt{7}}\approx\frac{7}{8},\quad \frac{-\frac{\sqrt{2}}{12}}{\frac{\sqrt{14}}{4}}=-\frac{1}{3\sqrt{7}}\approx-\frac{1}{8},$$

因此我们可以利用上述斜率的近似值绘出 3 个坐标轴, 如图 6–8 所示.

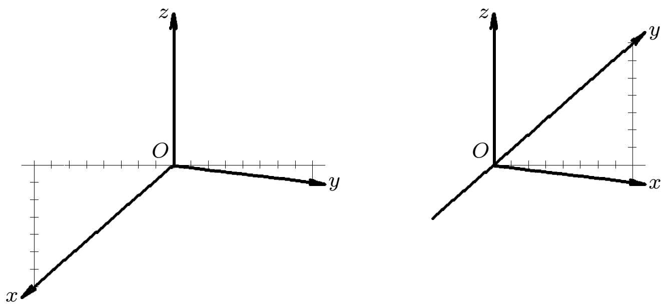


图 6–8

有时为了直观的需要, 可以把视角取为 $(69.3°, 70.5°)$, 画出的坐标轴恰与图 6–8 的轴成镜射对称. 作图方法完全相同. 见图 6–9. 不过要注意使 3 个轴构成右手系.

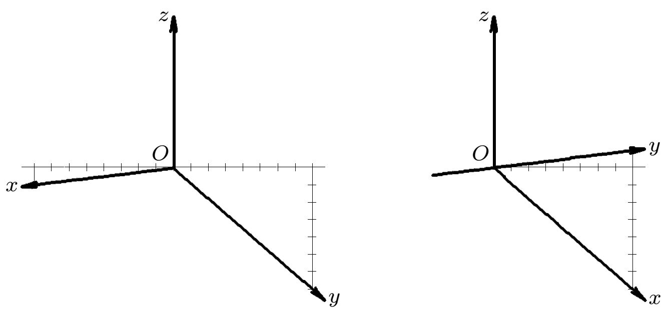
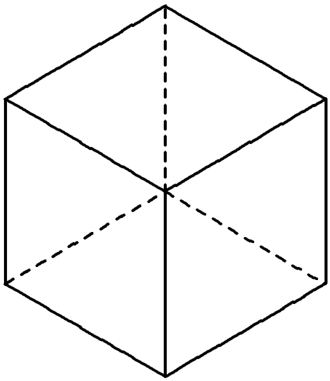
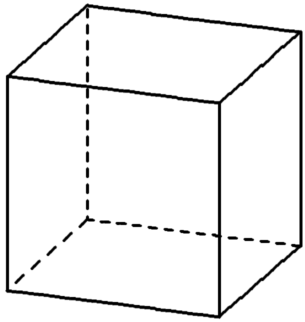


图 6–9

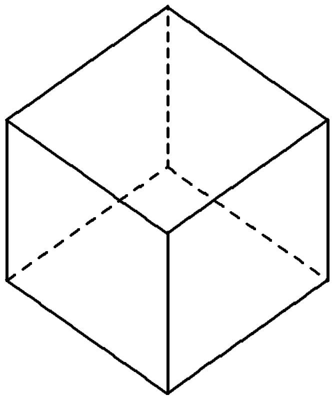
Maple 的默认视角取为 $(45°, 45°)$. 图 6–10 显示了一个立方体在 3 种视角下的投影图.



$\theta = 45^\circ,\ \phi = 54.7^\circ$



$\theta = 20.7^\circ,\ \phi = 70.5^\circ$



$\theta = 45^\circ,\ \phi = 45^\circ$

图 6–10

习　题 6–1

1. 试分别用正等测投影及正二等测投影画出边长等于 2, 3, 4 的长方体以及正四面体.

§2　空间曲面与曲线的方程

在解析几何中研究的空间曲面 S 一般都可以被描述为一个 3 元函