对称变换及其典范形

教学内容：1. 在欧几里得空间中，对称变换的概念，对称变换与对称矩阵间的关系。

2. 对称变换、对称矩阵可对角化。

教学目的：1. 了解对称变换的定义，掌握对称变换在规范正交基下与对称矩阵一一对应。

2. 掌握对称变换、对称矩阵的有关结论。

3. 掌握对称变换、对称矩阵可对角化定理。

4. 熟练掌握对称矩阵用正交矩阵化对角形的方法。

一、对称变换、对称矩阵．

二、对称变换、对称矩阵的典范形是对角矩阵。

三、相关的结论．

一、对称变换，对称矩阵．

定义4.1．欧几里德空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 如果满足 $(\mathcal{A}(\alpha), \beta) = (\alpha, \mathcal{A}(\beta))$，对所有 $\alpha, \beta \in V$．则称 $\mathcal{A}$ 为对称变换。

例4.1 设 W 是 V 的一个线性子空间，则 V 到 W 上的正交投影 $P_W \in End(V)$ 是一个对称变换．

证明：$\forall \alpha, \beta \in V$，作正交分解

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in W, \quad \alpha_2 \in W^\perp.$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2, \quad \beta_1 \in W, \quad \beta_2 \in W^\perp.$$

根据正交投影的定义，有 $\mathcal{P}_W(\alpha)=\alpha_1$，$\mathcal{P}_W(\beta)=\beta_1$

则 $(\mathcal{P}_W(\alpha),\beta)=(\alpha_1,\beta_1+\beta_2)=(\alpha_1,\beta_1)+(\alpha_1,\beta_2)=(\alpha_1,\beta_1)$，

$(\alpha,\mathcal{P}_W(\beta))=(\alpha_1+\alpha_2,\beta_1)=(\alpha_1,\beta_1)+(\alpha_2,\beta_1)=(\alpha_1,\beta_1)$，

所以 $(\mathcal{P}_W(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathcal{P}_W(\beta))$ 即 $\mathcal{P}_W$ 是正交变换。

命题4.1 设 $\mathcal{A}$ 是欧几里得空间 V 上的对称变换，

如 W 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间，则 $W^{\perp}$ 也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。

证明：$\forall \beta\in W^{\perp}$，要证 $\mathcal{A}\beta\in W^{\perp}$.

由已知 $\forall\alpha\in W$，对于 $\mathcal{A}(\alpha)\in W$.

因此 $(\alpha,\mathcal{A}(\beta))=(\mathcal{A}(\alpha),\beta)=0$，$\therefore \mathcal{A}(\beta)\in W^{\perp}$.

即 $W^{\perp}$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。

命题4.2. 欧几里得空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 是对称变换

$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}$ 在 V 的任意一个规范正交基下的矩阵是对称矩阵。

证明：($\Rightarrow$) $\mathcal{A}$ 在规范正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵是 $A=(a_{ij})_n$

则对于任意的 $i,j=1,2,\cdots n$ 有

$(\eta_i,\mathcal{A}(\eta_j))=(\eta_i,\sum\limits_{k=1}^{n}a_{kj}\eta_k)=a_{ij}$.

$(\mathcal{A}(\eta_i),\eta_j)=(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}\eta_k,\eta_j)=a_{ji}$,

$\because \mathcal{A}$ 是对称变换. $\therefore a_{ij}=(\eta_i,\mathcal{A}(\eta_j))=(\mathcal{A}(\eta_i),\eta_j)=a_{ji}$

于是 A 是对称矩阵。

($\Leftarrow$) 设线性变换 $\mathcal{A}$ 在规范正交基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下矩阵 A 是

对称矩阵. $\forall\alpha,\beta\in V$

$\alpha=(\eta_1,\cdots,\eta_n)X$, $\beta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)Y$.

则 线性变换$\mathscr{A}$作用下

$$\mathscr{A}(\alpha)=(\eta_1,\cdots\eta_n)AX. \quad \mathscr{A}(\beta)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)AY.$$

于是 $(\mathscr{A}(\alpha),\beta)=(AX)^TY=X^TA^TY=X^T(AY)=(\alpha,\mathscr{A}(\beta))$

$\therefore$ $\mathscr{A}$是对称变换。

二. 对称变换的典范形是对角矩阵.

引理4.3. 实对称矩阵的特征值都是实数。

证明：设A是实对称矩阵. $\lambda_0\in\mathbb{C}$复数是A的一个特征值，$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in M_{n,1}(\mathbb{C})$，$\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{x_1}\\ \vdots\\ \overline{x_n}\end{pmatrix}$.

$AX=\lambda_0X$，A是实矩阵 $\therefore\overline{A}=A$.

$$A\overline{X}=\overline{A}\,\overline{X}=\overline{AX}=\overline{\lambda_0X}=\overline{\lambda_0}\,\overline{X};$$

$$\overline{X}^T(AX)=\overline{X}^TA^TX=(A\overline{X})^TX=(\overline{AX})^TX=(\overline{\lambda_0}\overline{X})^TX$$

其左 $\overline{X}^T(\lambda_0X)$，右边为 $\overline{\lambda_0}\,\overline{X}^TX$

于是 $\lambda_0\overline{X}^TX=\overline{\lambda_0}\,\overline{X}^TX$ 又$\because X\neq0$. $\therefore\overline{X}^TX\neq0$

$\therefore\lambda_0=\overline{\lambda_0}$. 即$\lambda_0$是个实数。

引理4.4. 对称变换$\mathscr{A}$不同特征值的特征向量必正交。

证明：设λ_1,λ_2是$\mathscr{A}$的两个不同特征值.

$\alpha,\beta\in V$分别是属于λ_1,λ_2的特征向量.

即 $\mathscr{A}\alpha=\lambda_1\alpha$，$\mathscr{A}\beta=\lambda_2\beta$.

$\therefore$ $\lambda_1(\alpha,\beta)=(\lambda_1\alpha,\beta)=(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\alpha,\lambda_2\beta)=\lambda_2(\alpha,\beta)$

$\therefore \lambda_1(\alpha,\beta)=\lambda_2(\alpha,\beta)$

又 $\because \lambda_1\neq\lambda_2$ $\quad\therefore (\alpha,\beta)=0$ 即 $\alpha\perp\beta$。

定理4.5 任意的实对称矩阵 $A\in M_n(\mathbb{R})$，一定存在正交矩阵 $T\in O(n,\mathbb{R})$，使得 $T^{-1}AT=T'AT$ 是对角矩阵。而且还可以使得 $T\in SO(n,\mathbb{R})$，即 $|T|=1$。

证明：由于实对称矩阵与对称变换的关系，只要证明对称变换 $\mathcal{A}$ 有 n 个特征向量构成标准正交基就行了。

对空间的维数 n 作归纳法。

$n=1$，结论显然成立。

设 $n-1$ 结论成立。对 n 维欧氏空间，线性变换 $\mathcal{A}$ 有一个实特征值 λ_1，相应有特征向量 ξ_1，不妨设 ξ_1 是单位向量。作线性子空间 $L(\xi_1)$ 的正交补 $V_1=L(\xi_1)^{\perp}$，根据命题4.1 V_1 是 $\mathcal{A}$ 的 $n-1$ 维不变子空间。限制映射 $\mathcal{A}|_{V_1}$ 仍是对称变换。由归纳假设 $\mathcal{A}|_{V_1}$ 有 $n-1$ 个特征向量 $\xi_2,\cdots,\xi_n$ 构成 V_1 的标准正交基。从而 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 是 V 的标准正交基，且它们都是 $\mathcal{A}$ 的 n 个特征向量。

如果基 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 关于旧基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 的变换矩阵 T 的行列式不等于1（即两组基的定向相反），那么只要用 $-\xi_1$ 代替 ξ_1 就可以使变换矩阵的行列式为1。

推论4.6 实对称矩阵一定可对角化；而且实对称矩阵相合于一个以它的特征值为对角元的对角矩阵。所以实对称矩阵的符号差是它的正负特征值个数之差。

实对称矩阵A，用正交矩阵T，使A相似，相合对角矩阵的方法，步骤如下。

(1) 计算矩阵A的特征多项式$|\lambda E-A|$，再求出它的所有根$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$；

(2) 对于每个特征值λ_i求出它的所有特征向量，即解对应齐次线性方程组

$$(\lambda_i E-A)X=0\ ,\ X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$$

的一个基础解系，这就是V_{λ_i}特征子空间的基。再通过正交化方法，从这个基出发构成一个规范正交基$\eta_{i1},\cdots,\eta_{i,k_i}$。

(3) 把(2)中构造的各个规范正交基合并，就得到V的规范正交基$\eta_{11},\cdots\eta_{1,k_1},\cdots\eta_{r,k_r}$。这是因为$A$的不同特征值的特征向量互相正交，而且特征子空间的维数之和等于整个空间V的维数。以此规范正交基作为列向量构成的矩阵就是所要求的正交矩阵T。

例4.1. 设
$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

解：$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^3(\lambda-5)$　$\therefore A$ 的特征值 1（3重）以及 5.

当 $\lambda_1=1$ 时.求 $(1E-A)X=0$ 的一个基础解系为：

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

用施密特正交化，先把 ξ_1,ξ_2,ξ_3 正交化为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

$$\alpha_1=\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}.$$

再把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化为 η_1,η_2,η_3.

$$\eta_1=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\\0\\0\end{pmatrix},\quad \eta_2=\begin{pmatrix}\sqrt{6}/6\\-\sqrt{6}/6\\\sqrt{6}/3\\0\end{pmatrix},\quad \eta_3=\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/6\\\sqrt{3}/6\\\sqrt{3}/6\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2=5$ 时，求 $(5E-A)X=0$ 的一个基础解系为：

$$\xi_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}.\quad \text{把 } \xi_4 \text{ 单位化为 } \eta_4=\begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}.$$

即所求正交矩阵 T 为：$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$.

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&5\end{pmatrix}.$$

此时 $|T|=-1$.　令 $T_1=(-\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)$

$|T_1|=1$.　$T_1^{-1}AT_1=\begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&5\end{pmatrix}.$

因为 T 是正交矩阵，$T^{T}=T^{-1}$. 所以 $T^{T}AT=T^{-1}AT=\mathrm{diag}(1,1,1,5)$。

三、相关的结论：

设A为实对称矩阵，则A是正定的 $\Leftrightarrow$ A的特征值全大于零。

证明：A为实对称矩阵，存在正交矩阵T，使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$ 其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的全部特征值。

因此A正定的充分必要条件是上面的对角矩阵正定，从而充分必要条件是其对角线元即A的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$全大于零。

设A，B都是实对称矩阵，则存在正交矩阵T，使得$T^{-1}AT=B$充分必要条件A，B有相同的特征值。

证明：($\Rightarrow$) 因A与B相似，相似矩阵有相同的特征多项式即有相同的特征值。

($\Leftarrow$) 设A，B有相同的特征值，因此存在正交矩阵P，Q使得$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$Q^{-1}BQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，由于矩阵的相似，满足对称性，传递性，所以$A$与$B$相似。

练习题：习题8-4

1 (1)，(6)　2 (1)，(4)，3，4，8。