有理函数的分拆

——多项式因式分解定理的应用

主讲人: 林　磊

• 教学时间安排

在第十章第五节因式分解定理学习之后, 作为该定理的应用, 用一节课左右的时间介绍这一内容.

• 教学目的

在学习数学分析时, 学到有理函数的不定积分时, 需要介绍有理函数的分拆技巧, 但当时没有介绍它的理论基础. 因此, 在讲解了多项式因式分解定理之后, 一方面这一内容可作为该定理的一个应用, 另一方面又弥补了数学分析教学中的不足. 此外, 还能以此说明数学专业的各门课程之间都有着千丝万缕的联系, 我们不能将其人为割裂开来.

例. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\,x}{(x-1)^3(x^2+4x+5)^2}$.

解. 先将被积函数写成如下形式:

$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+4x+5)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{B_1+C_1x}{x^2+4x+5} + \frac{B_2+C_2x}{(x^2+4x+5)^2}.$$

利用待定系数法求出系数 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2$, 然后再求积分.

现考虑对一般的不是多项式函数的非零有理函数

$$\frac{G(x)}{F(x)}, \quad F(x), G(x) \in \mathbb{R}[x], \deg F(x) > 0, (F(x), G(x)) = 1.$$

如何将上述有理函数写成部分分式的和?

第一步 将“假分数”化为“带分数”

如果 $\deg G(x) \geqslant \deg F(x)$, 那么由带余除法定理, 存在 $h(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$, 使得 $G(x) = h(x)F(x) + g(x)$, $\deg g(x) < \deg F(x)$ (注意: $g(x) \neq 0$). 则

$$\frac{G(x)}{F(x)} = h(x) + \frac{g(x)}{F(x)}.$$

所以, 问题就简化为对 $\dfrac{g(x)}{F(x)}$ 的分拆问题.

第二步 分解 $F(x)$

不妨设 $F(x)$ 是首一多项式. 则由因式分解定理,

$$F(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x),$$

其中每个 $f_i(x) = p_i(x)^{r_i}$ $(r_i \geqslant 1)$, $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_s(x)$ 是不同的首一不可约多项式. 由引理 8.6 (p225), 这些 $p_i(x)$ 或者是一次的, 或者是二次的, 且判别式小于零.

第三步

令 $F_i(x) = \dfrac{F(x)}{f_i(x)} \in \mathbb{R}[x]$ (即, $F_i(x)f_i(x) = F(x)$), 则

$$(F_1(x), F_2(x), \cdots, F_s(x)) = 1.$$

于是, 存在多项式 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_s(x) \in \mathbb{R}[x]$, 使得

$$u_1(x)F_1(x) + u_2(x)F_2(x) + \cdots + u_s(x)F_s(x) = 1.$$

第四步

存在多项式 $v_1(x), v_2(x), \cdots, v_s(x) \in \mathbb{R}[x]$, 使 $g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{s} v_i(x)F_i(x)$, 且可要求 $\deg v_i(x) < \deg f_i(x)$, $i = 1, \cdots, s$.

这是因为由上一步,

$$\begin{aligned} g(x) &= u_1(x)g(x)F_1(x) + u_2(x)g(x)F_2(x) + \cdots + u_s(x)g(x)F_s(x) \\ &= V_1(x)\cdot F_1(x) + V_2(x)\cdot F_2(x) + \cdots + V_s(x)\cdot F_s(x). \end{aligned}$$

对于每个 $V_i(x)$, 存在 $h_i(x), v_i(x) \in \mathbb{R}[x]$, 使得

$$V_i(x) = h_i(x)f_i(x) + v_i(x), \quad \deg v_i(x) < \deg f_i(x).$$

因此

$$\begin{aligned} g(x) = \sum_{i=1}^{s} V_i(x)F_i(x) &= \sum_{i=1}^{s}(h_i(x)f_i(x) + v_i(x))F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{s} v_i(x)F_i(x) + \sum_{i=1}^{s} h_i(x)f_i(x)F_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{s} v_i(x)F_i(x) + F(x)\sum_{i=1}^{s} h_i(x). \end{aligned}$$

由于 $\deg g(x) < \deg F(x)$, 因此 $F(x)\sum_{i=1}^{s} h_i(x) = 0$.

第五步

$$\frac{g(x)}{F(x)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{v_i(x)F_i(x)}{F(x)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{v_i(x)}{f_i(x)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{v_i(x)}{p_i(x)^{r_i}}.$$

第六步

对于 $\dfrac{v(x)}{(x-a)^k}$, $\deg v(x) < k$, 则 $v(x) \in \mathbb{R}[x]_k$, 而 $1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{k-1}$ 是线性空间 $\mathbb{R}[x]_k$ 的基. 于是, 存在 $A_1, A_2, \cdots, A_k \in \mathbb{R}$, 使 $v(x) = \sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i}(x-a)^i$. 从而

$$\frac{v(x)}{(x-a)^k} = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} A_{k-i}(x-a)^i}{(x-a)^k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{A_i}{(x-a)^i}.$$

(事实上, $v(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \dfrac{v^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$, 即 $A_i = \dfrac{v^{(k-i)}(a)}{(k-i)!}$.)

第七步

对于 $\dfrac{v(x)}{(x^2+px+q)^k}$, 其中 $p^2 - 4q < 0$, $\deg v(x) < 2k$, 则利用带余除法, 有

$$\begin{aligned} v(x) &= (B_k + C_k x) + q_1(x)(x^2+px+q) \\ &= (B_k + C_k x) + (B_{k-1} + C_{k-1}x)(x^2+px+q) + q_2(x)(x^2+px+q)^2 \\ &= \cdots = \sum_{i=0}^{k-1}(B_{k-i} + C_{k-i}x)(x^2+px+q)^i. \end{aligned}$$

于是, $\dfrac{v(x)}{(x^2+px+q)^k} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{B_i + C_i x}{(x^2+px+q)^i}$.

最后, 利用第一步、第五步、第六步和第七步, 我们就得到了一般有理函数 $\dfrac{G(x)}{F(x)}$ 的分拆.