线性非齐次方程

形如

$$y' - p(x)y = q(x) \tag{2.18}$$

的方程称为一阶线性方程, 其中$p(x)$和 $q(x)$在$x \in I$ 上连续.

当 $q(x) \equiv 0, \quad x \in I$ 时, 方程(2.18)简称为线性齐次方程. 它有通解 $y = ce^{\int P(x)dx}$

当 $q \neq 0$ 时, 方程(2.18)称为线性非齐次方程.

下面求解该方程.设

$$y = C(x)\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s\right) \tag{2.19}$$

是线性非齐次方程(2.18)的解, 其中$C(x)$是待定函数.

代入方程(2.18)化简后有

$$C'(x) = q(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s \right), \tag{2.20}$$

两边对 x 积分即得

$$C(x) = C + \int_{x_1}^{x} q(u)\exp\left(-\int_{x_0}^{u} p(s)\mathrm{d}s \right)\mathrm{d}u \tag{2.21}$$

其中C是任意常数.将(2.21)代入(2.19) 即得线性非齐次方程

的通解

$$y = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(s)\mathrm{d}s \right)\left(C + \int_{x_1}^{x} q(u)\exp\left(-\int_{x_0}^{u} p(s)\mathrm{d}s \right)\mathrm{d}u \right). \tag{2.22}$$

注1：这种将线性齐次方程通解中的任意常数变易为待定函数, 从而求出线性非齐次方程通解的方法, 称为常数变易法. 常数变易法本质上也是一种变量替换。

注2：通解公式(2.22)由两项的和组成, 一项是相应的线性齐次方程通解(2.7), 另一项是线性非齐次方程的特解

因此得到线性非齐次方程的通解结构：

线性非齐次方程的通解等于相应线性齐次方程的通解与线性非齐次方程的一个特解之和.

不难验证, 满足方程(2.18)满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解为

$$y=\exp\left(\int_{x_0}^{x}p(s)\mathrm{d}s\right)\left(y_0+\int_{x_0}^{x}q(u)\exp\left(-\int_{x_0}^{u}p(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}u\right). \qquad (2.23)$$

公式(2.22)和(2.23)都称为常数变易公式.

例2.5 求解方程 $y'-2xy=\mathrm{e}^{x^2}\cos x.$

解1: 首先求相应线性齐次方程

$$y'-2xy=0$$

的通解: $y=C\exp(x^2).$

利用常数变易法求原方程的通解. 令

$$y = C(x)e^{x^2},$$

代入原方程后化简得

$$C'(x) = \cos x.$$

两边积分有

$$C(x) = C + \sin x.$$

于是原方程的通解为

$$y = \exp\left(x^2\right)(C + \sin x)$$

其中 C 为任意常数.

解2：直接利用常数变易公式(2.22)来求解. 此时

$$p(x) = 2x \quad q(x) = \exp\left(x^2\right)\cos x$$

取

$$h(x) = \exp\int_0^x 2s\mathrm{d}s = \exp(x^2),$$

把它们代入公式(2.22), 即得通解

$$y = h(x)\left(C + \int_0^x \frac{\exp(s^2)\cos(s)}{h(s)}\mathrm{d}s\right) = \exp\left(x^2\right)(C + \sin x)$$

例2.6 求出方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + y^3}$ 的通解.

解: 显然这个方程关于 y是非线性, 也不能变量分离. 但把 x看成 y的函数有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x + y^3}{y} = \frac{1}{y} x + y^2, \quad y \neq 0$$

这是关于 x 的线性方程, 取$h(y) = \exp\left(\int_1^y \frac{\mathrm{d}s}{s}\right) = y$, 则它的通解为

$$x = h(y)\left(C + \int_0^y \frac{u^2}{h(u)} \mathrm{d}u\right) = y\left(C + \frac{y^2}{2}\right).$$

它是原方程的隐式通解.

注意, $y = 0$也是原方程的特解, 显然它不包含在通解之中.

有些方程本来不是线性方程,但通过变量替换可以化为线性方程,例如

伯努利(Bernoulli)方程:

$$y' = p(x)y + q(x)y^n,\ n \neq 0,1 \quad (2.24)$$

其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 $x \in I$ 上连续.

为了求解方程(2.24), 方程的两边同除以 y^n 得到

$$y^{-n}y' = p(x)y^{1-n} + q(x).$$

令 $u = y^{1-n}$, 则原方程为线性方程:

$$u' = (1-n)p(x)u + (1-n)q(x).$$

它是可积的，利用常数变易法即可求解.

注意:当 $n > 0$ 时, Bernoulli方程(2.24)还有解 $y = 0$.

例2.7 求解 $xy' = -y + xy^2 \ln x, \quad x > 0.$

解: 这是 $n = 2$ 的Bernoulli方程, 把它改写成

$$y^{-2}y' = -\frac{1}{x}y^{-1} + \ln x, \ \ y \neq 0.$$

作变换 $u = y^{-1}$, 则 $u' = -y^{-2}y'$, 代入上式有

$$u' = \frac{1}{x}u - \ln x.$$

这是线性方程. 取

$$h(x) = \exp\left(\int_1^x \frac{\mathrm{d}s}{s}\right) = x,$$

它的通解为

$$u = h(x)\left(C - \int_1^x \frac{\ln u}{u}\mathrm{d}u\right) = x\left(C + \frac{1}{2}\ln^2 x\right).$$

回代原变量, 得到原方程的通解:

$$\frac{1}{y} = Cx + \frac{x(\ln x)^2}{2}.$$

此外, 还有特解 $y = 0.$

5. Riccati方程

形如 $y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ (2.25)

的方程称为Riccati方程, 其中 $p \neq 0$, 且 $p(x), q(x)$ 和 $r(x)$

是在 $x \in I$ 上连续的已知函数.

例如 $x^3 y' = y^2 + x^2 y - x^2$, $y' = x^2 + y^2$ 都是Riccati方程.

注：一般情况下Riccati方程是不可积的. 只是在某些特殊情况下, 才可以求出它的通解. 我们有下述结论:

如果已知Riccati方程(2.25)的一个特解, 则它是可积的.

设已知方程(2.25)的一个特解为 $y_p(x)$，则令

$$u = y - y_p(x),$$

代入方程(2.25)得

$$u' + y_p'(x) = p(x)(u + y_p(x))^2 + q(x)(u + y_p(x)) + r(x)$$
$$= p(x)u^2 + 2p(x)y_p(x)u + q(x)u + \left[p(x)y_p^2(x) + q(x)y_p(x) + r(x)\right],$$

注意到

$$y_p'(x) \equiv p(x)y_p^2(x) + q(x)y_p(x) + r(x),$$

有

$$u' = p(x)u^2 + [2p(x)y_p(x) + q(x)]u.$$

这是$n=2$时的Bernoulli方程, 只要求它的非零解即得原方程除特解$y_p(x)$以外的解.

例2.8 求解 $x^3y' = y^2 + x^2y - x^2.$

解: 这是Riccati方程. 易知 $y_p(x) = x$ 是它的一个特解.

于是作变换

$$u = y - x,$$

代入原方程, 化简后可得

$$u' = \frac{1}{x^3}u^2 + (\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x})u. \qquad (2.26)$$

作变换 $z = u^{-1}$, 代入方程(2.26), 有

$$z' = -(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x})z - \frac{1}{x^3}.$$

解此线性方程, 取

$$h(x) = \exp\int\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{2}{x}},$$

得

$$z = h(x)[C - \int \frac{1}{x^3 h(x)} \mathrm{d}x] = \frac{1}{x} \mathrm{e}^{\frac{2}{x}} \left(C - \int \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{2}{x} \right) \mathrm{d}x \right) = \frac{1}{x} \mathrm{e}^{\frac{2}{x}} (C - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}),$$

回代变量得原方程的通解为

$$\frac{1}{y - x} = \frac{1}{x} \mathrm{e}^{\frac{2}{x}} (C - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}).$$

特解 $y = x$ 不包含在以上通解中.

注：本节用初等积分法可求解的方程都必须首先认定自变量和未知函数, 然后根据方程类型求解. 这是本节求解方法的特点.